令和５年度　入学試験問題（１月専願）

数　　学

受験上の注意

１．合図があるまで、この冊子を開いてはいけません。
２．受験番号と氏名は解答用紙の定められたところに記入しなさい。
３．解答はすべて解答用紙の定められたところに記入しなさい。
４．考える過程や、計算過程は「計算用紙」に書くこと。
５．問題は１ページから６ページまであります。
６．試験時間は 50 分です。
７．答の$\sqrt{\ }$の中はできるだけ簡単にしなさい。
８．円周率はπを用いなさい。

開志国際高等学校

$\boxed{1}$ 次の（1）～（10）の問いに答えよ。

（1） $(-2)\times 4-11$ を計算せよ。

（2） $4ab\times\dfrac{15}{2}a^2b\div(5ab)^2$ を計算せよ。

（3） 1次方程式 $\dfrac{1-2x}{4}=\dfrac{x+5}{6}$ を解け。

（4） $(x+1)^2-11(x+1)+30$ を因数分解せよ。

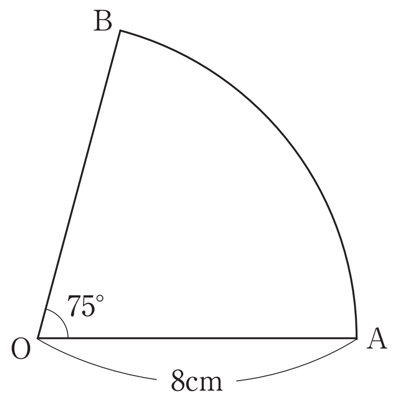
（5） ある数量の水に a g の食塩を加えて 37 g の食塩水を作ったところ，濃度は b% 未満であった。このとき，数量の関係を不等式で表せ。

（6） y は x の1次関数で，そのグラフは2点（-1, 3），(3, -4) を通る。この1次関数の式を求めよ。

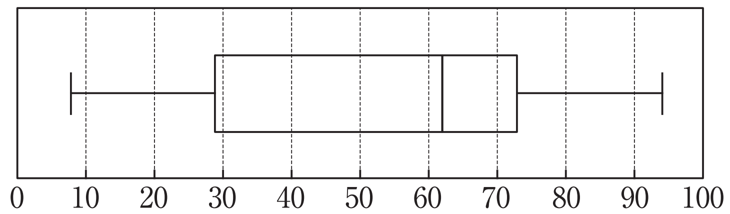
（7） 正十二角形の1つの内角の大きさを求めよ。

（8） $\sqrt{84n}$ が自然数になるような，最も小さい自然数 n の値を求めよ。

（9） 下の図のおうぎ形 OAB において，半径が 8cm，中心角が 75° のとき，おうぎ形 OAB の面積を求めよ。



(10) 下の図はある 40 人の数学のテストの得点の箱ひげ図である。この箱ひげ図から読み取れることとして，正しいものを次の①～④から 1 つ選べ。



①範囲は 90 点より大きい。

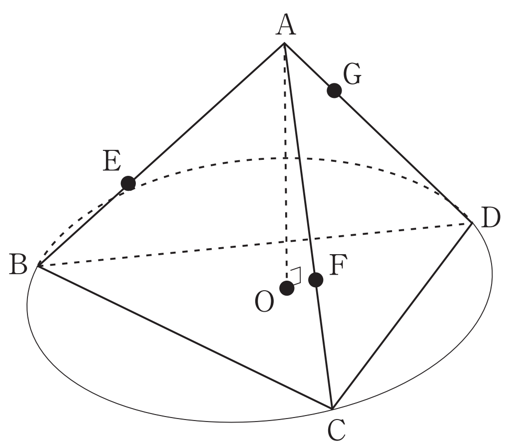
②半分以上の生徒が 60 点以上である。

③ 30 点以上 70 点未満の生徒の数は 20 人未満である。

④四分位範囲は 40 点以下である。

$\boxed{5}$

下の図の１辺の長さが６cm の正四面体 ABCD であり，頂点 B，C，D は半径 $2\sqrt{3}$ cm の円 O 上の点である。このとき，AO ⊥ 平面 BCD である。また，辺 AB，AC，AD 上に AE：EB＝3：2，AF：FC＝2：1，AG：GD＝1：3 となるような点 E，F，G をそれぞれとる。このとき，次の（１）～（４）の問いに答えよ。



（１） 線分 AO の長さを求めよ。

（２） 正四面体 ABCD の体積を求めよ。

（３） △AFG の面積を求めよ。

（４） 四面体 AEFG の体積を求めよ。

$\boxed{2}$ 次の（１），（２）の問いに答えよ。

（１） ４人の生徒 A，B，C，D がいる。この４人を横一列に並べるとき，左端が C である確率を求めよ。

（２） ある学校の１年生は全体で 170 人いる。そのうち，男子の 17％，女子の 27％が陸上競技部員で，その人数の合計は 34 人である。１年生の男子と女子の人数をそれぞれ求めよ。

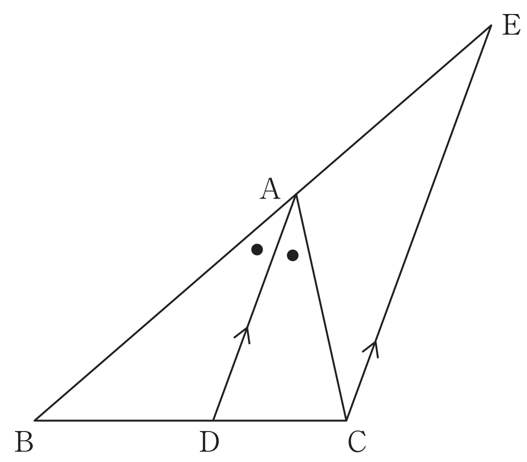
$\boxed{3}$ 次の（１），（２）の問いに答えよ。

（１） 次の①，②の逆をいえ。また，それが正しいかどうか調べ，正しい場合は○を，正しくない場合は反例をあげよ。ただし，m，n は自然数とする。

① $a > 0$，$b > 0$ ならば $ab > 0$

② $m + n$ が偶数ならば m，n はともに偶数

（２） △ABC の∠A における二等分線と辺 BC の交点を D とする。また，点 C を通り，AD と平行な直線と直線 AB の交点を E とする。このとき，AB：AC＝BD：DC を証明せよ。



4

［1］ 次のTは連続する自然数の和の求め方についてAさんの考え方をまとめたものである。このとき下の（1），（2）の問いに答えよ。

T〈Aさんの考え方〉

1から7までの連続する自然数の和は，等式 $(n+1)^2-n^2=2n+1$ が，$n=\frac{1}{2}\{(n+1)^2-n^2\}-\frac{1}{2}$ ……（*）と変形できることを利用して，下の図Sのように，次の $\boxed{1}$ ～ $\boxed{3}$ の手順で求めることができる。

$\boxed{1}$ 1を等式（*）を使用して $\frac{1}{2}(2^2-1^2)-\frac{1}{2}$ に変形する。同様にして，2，3，4，5，6，7も変形を行う。

$\boxed{2}$ $\boxed{1}$ で変形した式を足し合わせると，（*）式の第1項同士で互いに打ち消し合い，$\frac{1}{2}(-1^2+8^2)$ が残る。また，第2項は $-\frac{1}{2}$ が7個分と考えられるので，$-\frac{1}{2}\times 7$ となる。

$\boxed{3}$ よって，$\boxed{2}$ を計算すると1から7までの連続する自然数の和は，28となる。

$$
\begin{aligned}
&1+2+3+4+5+6+7\\
&=\left\{\frac{1}{2}(2^2-1^2)-\frac{1}{2}\right\}+\left\{\frac{1}{2}(3^2-2^2)-\frac{1}{2}\right\}+\left\{\frac{1}{2}(4^2-3^2)-\frac{1}{2}\right\}+\left\{\frac{1}{2}(5^2-4^2)-\frac{1}{2}\right\}\\
&\quad+\left\{\frac{1}{2}(6^2-5^2)-\frac{1}{2}\right\}+\left\{\frac{1}{2}(7^2-6^2)-\frac{1}{2}\right\}+\left\{\frac{1}{2}(8^2-7^2)-\frac{1}{2}\right\}\\
&=\frac{1}{2}\{(\cancel{2^2}-1^2)+(\cancel{3^2}-\cancel{2^2})+(\cancel{4^2}-\cancel{3^2})+(\cancel{5^2}-\cancel{4^2})+(\cancel{6^2}-\cancel{5^2})+(\cancel{7^2}-\cancel{6^2})+(8^2-\cancel{7^2})\}-\frac{1}{2}\times 7\\
&=\frac{1}{2}(-1^2+8^2)-\frac{1}{2}\times 7\\
&=28
\end{aligned}
$$

図S

このように $\boxed{1}$ ～ $\boxed{3}$ の手順で行うと，1から m までの連続する自然数の和は，次のようになる。

$$
\begin{aligned}
&1+2+3+\cdots+m\\
&=\left\{\frac{1}{2}(2^2-1^2)-\frac{1}{2}\right\}+\left\{\frac{1}{2}(3^2-2^2)-\frac{1}{2}\right\}+\left\{\frac{1}{2}(4^2-3^2)-\frac{1}{2}\right\}+\cdots+\left\{\frac{1}{2}((m+1)^2-m^2)-\frac{1}{2}\right\}\\
&=\frac{1}{2}\left(-1^2+\boxed{X}^2\right)-\frac{1}{2}\times m\\
&=\frac{1}{2}\left(\boxed{X}+1\right)\left(\boxed{X}-1\right)-\frac{1}{2}\times m\\
&=\frac{1}{2}m\left(\boxed{Y}\right)
\end{aligned}
$$

（1） $\boxed{X}$，$\boxed{Y}$ に当てはまる式をそれぞれ書け。

（2） 1から100までの連続する自然数の和を求めよ。

［2］ 1次関数 $y=x$（$x\geqq 0$）のグラフを直線 k とし，下の図1のように，x 座標が常に n である直線を ℓ とする。2直線 k，ℓ の交点をP，直線 ℓ と x 軸の交点をQとすると，2点P，Qの座標はそれぞれ（n，n），（n，0）である。このとき，次の（1）～（3）の問いに答えよ。ただし，n は自然数とする。

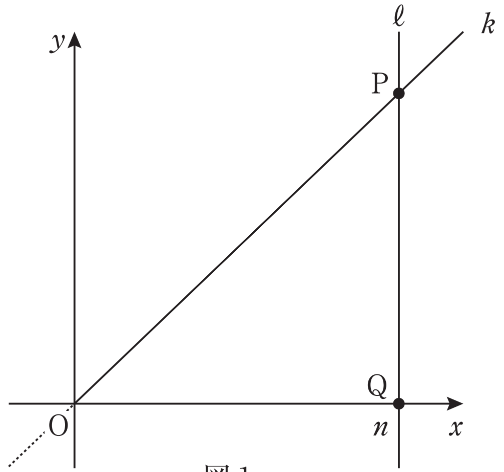


図1

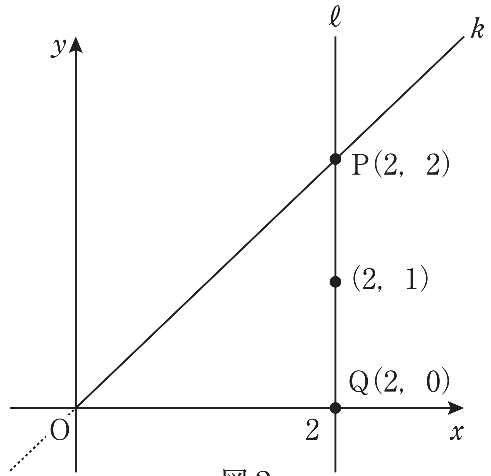


図2

（1） 上の図2は $n=2$ のときのものである。このとき，線分PQ上の点で，x 座標，y 座標がともに整数である点は3つである。このような x 座標，y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶとき，$n=5$ のときの線分PQ上の格子点の個数を求めよ。

（2）△OPQの周及び内部の格子点の個数を n を用いて表せ。

（3）△OPQの周及び内部の格子点の個数が2023を初めて超えるときの n の値を求めよ。